『数学の森』演習問題解答例

第 1 章　三角関数

[A-1]

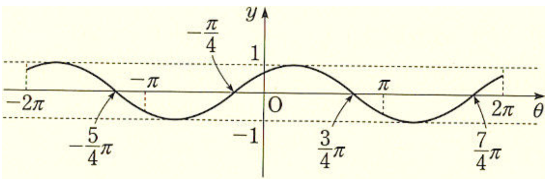
θ	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\theta$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

[B-1]
(1) $x = \pm\dfrac{\pi}{3}$　　(2) $x = \pm\dfrac{3}{4}\pi$

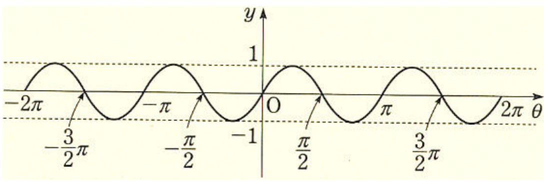
[B-2]
$\cos\alpha = -\dfrac{4}{5},\quad \sin\beta = \dfrac{12}{13}$

[B-3]

(1)



(2)



[B-4]
$0 \leqq x < \dfrac{2}{3}\pi,\ \ \dfrac{4}{3}\pi < x \leqq 2\pi$

[B-5]
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\ \ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ の左辺同士, 右辺同士を加えると $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$. この両辺を 2 で割ることにより, 公式の第 1 式が得られる. 第 2 式以降も同様.

[B-6]
$A = \dfrac{A+B}{2} + \dfrac{A-B}{2},\ \ B = \dfrac{A+B}{2} - \dfrac{A-B}{2}$ より, $\sin A = \sin(\dfrac{A+B}{2} + \dfrac{A-B}{2}) = \sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} +$

$\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A+B}{2}$, $\sin B = \sin(\dfrac{A+B}{2} - \dfrac{A-B}{2}) = \sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} - \cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$. この $\sin A$ と $\sin B$ を加えて, 公式の第 1 式が得られる. 第 2 式以降も同様.

[C-1]

加法定理を用いると $\cos x = \cos x\cos\dfrac{\pi}{3} - \sin x\sin\dfrac{\pi}{3}$ より $\dfrac{1}{2}\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x$，すなわち $\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. よって $x = -\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi$.

[C-2]

2 つの式の両辺を 2 乗し，辺々加えて加法定理を使うと，$\sin(\alpha-\beta) = -\dfrac{1}{2}$.

第 2 章 加法定理の応用と複素数

[A-1]

(1) $2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right)$　(2) $4\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$

[A-2]

(1) $u = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$

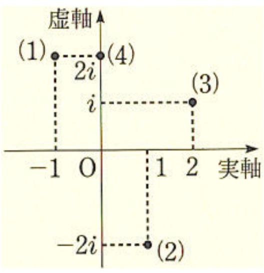
(2) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$, $\theta = -\dfrac{3}{4}\pi$ のとき最小値 $-\sqrt{2}$.

[A-3]

(1) $1-7i$　(2) $2i$　(3) i　(4) $-4+3i$

[A-4]

(1) $-1+2i$　(2) $1-2i$　(3) $i(1-2i) = 2+i$　(4) $(1+i)^2 = 2i$



[A-5]

α, β が実数のとき, 指数法則 $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ は, $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$, すなわち, 左辺を展開した $(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$ を意味する. この両辺の実部同士, 虚部同士がそれぞれ等しいということが, 三角関数の加法定理の関係式にほかならない. なお複素平面において $e^{i\theta}$ を角 θ の回転とみなしたときの指数法則の図形的な解釈は, 本の p.20

や p.22 に述べた通りである．

[B-1]
$y = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \dfrac{1}{2}\cos\theta\right) - \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \dfrac{1}{2}\cos\theta = \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right)$ で，$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき最大値 1, $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$ のとき最小値 -1.

[B-2]
$\angle\mathrm{PAB} = \theta$ とおくと，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で $\mathrm{AP} + \mathrm{BP} = 2\cos\theta + 2\sin\theta = 2\sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$． $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき AP + BP は最大となり，△APB は PA=PB の直角二等辺三角形.

[B-3]
$z = e^{i\theta}$ とおくと，$z^2 + z + \dfrac{1}{z} = \cos 2\theta + 2\cos\theta + i\sin 2\theta$ が実数となるための条件は $\sin 2\theta = 0$． よって，$z = 1,\ i,\ -1,\ -i$.

[B-4]
$z_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi i},\ z_2 = 2e^{\frac{2}{3}\pi i}$ より，$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ として
(1) $|z_1 z_2| = 2\sqrt{2},\ \arg(z_1 z_2) = -\dfrac{1}{12}\pi + 2n\pi$
(2) $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \sqrt{2},\ \arg\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{17}{12}\pi + 2n\pi$
(3) $|{z_1}^3| = 2\sqrt{2},\ \arg {z_1}^3 = -\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi$
(4) $|{z_2}^{-2}| = \dfrac{1}{4},\ \arg {z_2}^{-2} = -\dfrac{4}{3}\pi + 2n\pi$

[B-5]
与式の左辺 $= \cos(A + B + C) + i\sin(A + B + C) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

[C-1]
(1) $x^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + \sin 2\theta$ より，$y = x^2 + x - 1$.
(2) $x = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$.
(3) $x = \sqrt{2}$ のとき最大値 $y = 1 + \sqrt{2},\ x = -\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $y = -\dfrac{5}{4}$.

[C-2]
倍角の公式により $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ であるから，問題の不等式は $0 < 2\sin^2\theta + 5\sin\theta + 2$ となる．すなわち $0 < (2\sin\theta + 1)(\sin\theta + 2)$．$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より，$\sin\theta + 2 \geqq 1 > 0$． よって $0 < 2\sin\theta + 1$ すなわち $-\dfrac{1}{2} < \sin\theta$. 求める範囲は $-\pi \leqq \theta < -\dfrac{5}{6}\pi,\ -\dfrac{\pi}{6} < \theta < \pi$.

[C-3]
(1) $\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ より $\left(\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^{12} = e^{8\pi i} = 1$.
(2) $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ より $(1 + i)^{10} = 2^5 e^{\frac{5}{2}\pi i} = 32i$.

[C-4]
$z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$ より， $z^2-2z\cos\theta+1=0$ すなわち $(z-\cos\theta)^2=-\sin^2\theta$ だから , $z-\cos\theta=\pm i\sin\theta$,
$z=\cos\theta\pm i\sin\theta=e^{\pm i\theta}$． よって $z^n+\dfrac{1}{z^n}=e^{\pm in\theta}+e^{\mp in\theta}=2\cos n\theta$. (複号同順で記した.)

[C-5]
θ を実数とする.

ド・モアブルの公式において $n=2$ のとき $\cos 2\theta+i\sin 2\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2i\cos\theta\sin\theta+i^2\sin\theta=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+i(2\cos\theta\sin\theta)$. 実部同士, 虚部同士を比べて, 2 倍角の公式 $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta,\ \sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$ が導かれる.

$n=3$ のときは $\cos 3\theta+i\sin 3\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta+3i^2\cos\theta\sin^2\theta+i^3\sin^3\theta=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$. 実部同士, 虚部同士を比べて, $\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta,\ \sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta=3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta=-4\sin^3\theta+3\sin\theta$ という 3 倍角の公式が得られた.

第 3 章　ベクトル

[A-1]
(1) $\vec{a}+\vec{b}=(2,\ 3)+(-1,\ 2)=(1,\ 5)$
(2) $\vec{a}-\vec{b}=(2,\ 3)-(-1,\ 2)=(3,\ 1)$
(3) $2\vec{a}+3\vec{b}=(4,\ 6)+(-3,\ 6)=(1,\ 12)$
(4) $3(\vec{a}-\vec{b})-2(\vec{a}-2\vec{b})=\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 5)$

[A-2]
$\vec{x}=3\vec{a}=(-3,\ -6)$
$\vec{y}=-\vec{a}+\vec{b}=(2,\ 3)$

[A-3]
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1,\ 0,\ 0)+(1,\ 1,\ 0)=(2,\ 1,\ 0)$
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より， $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(4,\ 2,\ 0)$.

[B-1]
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
(3) $(x,\ y,\ z)=(1-t)(1,\ 2,\ -1)+t(3,\ 5,\ 1)=(1+2t,\ 2+3t,\ -1+2t)$
$x=1+2t,\ y=2+3t,\ z=-1+2t$
(4) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{2}$

[B-2]

(1) $(x,\ y,\ z) = s(1,\ -1,\ 1) + t(1,\ 0,\ \sqrt{2})$

$x = s + t,\ y = -s,\ z = s + \sqrt{2}t$

(2) $z = (-y) + \sqrt{2}(x + y)$,すなわち, $\sqrt{2}x + (\sqrt{2} - 1)y - z = 0.$

[C-1]

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{1}{2}(3\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}),\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{1}{4}(3\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}})$ であるから A は PQ を 1 : 3 に外分する点，B は PQ を 1 : 3 に内分する点である．

（注）O, A, B の座標が与えられているが，ベクトルを使うとまったく無関係に解くことができる．

第 4 章　微分法の基礎

[A-1]

(1) $y' = 3x^2 + 2$　　(2) $y' = 4x^3 + 2x - 1$　　(3) $y' = nx^{n-1} - kx^{k-1}$

(4) $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$　　(5) $y' = 2x - \dfrac{2}{x^3}$　　(6) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

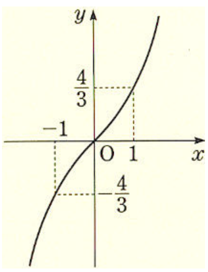
[A-2]

(1) 1.0006　　(2) 1.0004　　(3) 1.0003

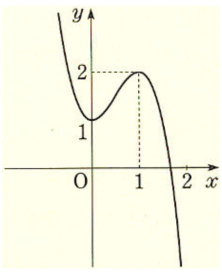
[A-3]

増減表は略. 以下の問題も同様.

(1)



(2)



[B-1]

(1) $y' = 2x - 3$　(2) $y' = 3x^2 + 4x + 1$　(3) $y' = 3x^2 - 1$

(4) $y' = 4x(x^2 - 5)$　(5) $y' = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$

[B-2]

$\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$ より $\sqrt{ab} \fallingdotseq \dfrac{a+b}{2}$.

[B-3]

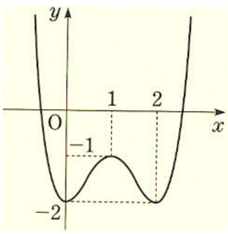
点 $(a,\ a^3 + 1)$ における $y = x^3 + 1$ の接線の方程式は $y = 3a^2(x - a) + a^3 + 1$．点 P を通るから $-3 = 3a^2(1 - a) + a^3 + 1$，すなわち $2a^3 - 3a^2 - 4 = 0$．$2a^3 - 3a^2 - 4 = (a - 2)(2a^2 + a + 2)$ より，$2a^2 + a + 2 > 0$ であるから $a = 2$．よって，求める方程式は $y = 12x - 15$.

[B-4]

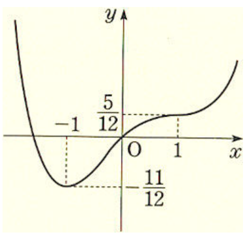
(1) $\dfrac{1}{x-2}$　(2) $\dfrac{x}{1-2x}$　(3) $h(x) = \dfrac{x-1}{2x-1}$

[B-5]

(1)



(2)



[C-1]

(1) $y' = \dfrac{5}{(x+5)^2}$　(2) $y' = \dfrac{-2x + 1}{x^2(x-1)^2}$　(3) $y' = -\dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$

(4) $y' = -\dfrac{x^2 + 4x - 1}{(x^2+1)^2}$　(5) $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}$

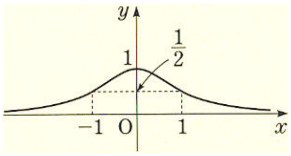
[C-2]

点 $(a,\ \sqrt{a+1})$ における $y=\sqrt{x+1}$ の傾きは $\dfrac{1}{2\sqrt{a+1}}$．法線の方程式は $y=-2\sqrt{a+1}(x-a)+\sqrt{a+1}$．点 $(2,\ 6)$ を通るから $6=-2\sqrt{a+1}(2-a)+\sqrt{a+1}$，整理して $4a^3-8a^2-3a-27=0$.

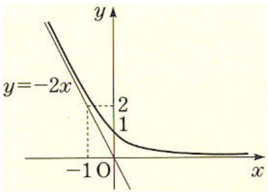
$4a^3-8a^2-3a-27=(a-3)(4a^2+4a+9)$ より，$4a^2+4a+9>0$ であるから $a=3$．よって，求める方程式は $y=-4x+14$.

[C-3]

(1) $|x|\to\infty$ のとき $y\to 0$

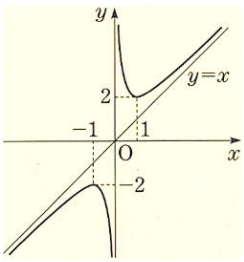


(2) $|x|\to-\infty$ のとき $y+2x\to 0$



[C-4]

(1) 定義域は $x\neq 0$



(2) 定義域は $|x|\leqq 1$