

## § 3 練習問題の解答

### 問 3.1

二項分布  $b(n, x, p)$  の平均と分散は 3.4 節に示したように次のようになる .

$$E[X] = np, \quad V[X] = np(1 - p)$$

となる .

$$n \rightarrow \infty, \quad p \rightarrow 0, \quad np = \lambda$$

という極限をとることより , ポアソン分布  $f(x) = e^{-\lambda} \lambda^x / x!$  の平均と分散は

$$E[X] = \lambda, \quad V[X] = \lambda$$

となることが分かる .

### 問 3.2

問 3.1 でも述べたように二項分布  $b(n, x, p)$  の平均と分散は次のようになる .

$$E[X] = np, \quad V[X] = np(1 - p)$$

標本比率の標準偏差 (標準誤差) を求めるためには ,  $X/n$  の分散を , まず計算する必要がある . 分散の計算においては , 二乗を求める計算が含まれることより ,

$$V[X/n] = V[X]/n^2 = \frac{p(1-p)}{n}$$

となる . この平方根を計算することにより , 標準偏差 (標準誤差) は

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

となる .

## 問 3.3

表 3.1 を再掲しておく .

表 3.1 航空機の故障と運航中止

$i$	システムの 故障箇所 $H_i$	システムの 故障確率 $P(H_i)$	システムに故障が 生じたとき運行中止 になる確率 $P(A H_i)$
1	機体	0.307	0.008
2	ロータ	0.156	0.048
3	電気	0.129	0.040
4	計器	0.130	0.052
5	動力	0.080	0.100
6	通信・運行・自動安定	0.030	0.151
7	その他	0.171	0.014

3.2.3 節の例と同様に , ベイズの定理を用いることにより ,

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)P(A|H_3)}{\sum_{j=1}^7 P(H_j)P(A|H_j)} = \frac{0.129 \times 0.040}{0.0366} = 0.141$$

となる .

## 問 3.4

表 3.2 を再掲しておく .

$X \sim N(50, 100)$  であることより ,  $Z = \frac{X - 50}{\sqrt{100}} = \frac{X - 50}{10}$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う確率変数となる . これより ,

$$P(60 < X \leq 70) = P(1 < Z \leq 2)$$

であることがわかる .

表 3.2 標準正規分布の上側確率

$q$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$p$	0.50000	0.46017	0.42074	0.38209	0.34458
$q$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$p$	0.30854	0.27425	0.24196	0.21186	0.18406
$q$	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
$p$	0.15866	0.13567	0.11507	0.09680	0.08076
$q$	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$p$	0.06681	0.05480	0.04457	0.03593	0.02872
$q$	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4
$p$	0.02275	0.01786	0.01390	0.01072	0.00820
$q$	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
$p$	0.00621	0.00466	0.00347	0.00256	0.00187
$q$	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4
$p$	0.00135	0.00097	0.00069	0.00048	0.00034

表 3.2 より

$$P(Z \leq 1) = 1 - P(Z > 1) = 1 - 0.15866 = 0.84134$$

$$P(Z \leq 2) = 1 - P(Z > 2) = 1 - 0.02275 = 0.97725$$

となり，これらの値を用いることで，

$$P(1 < Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq 1) = 0.97725 - 0.84134 = 0.13591$$

となる．

### 問 3.5

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(50, 100)$ ， $n = 100$  であることより，

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \sim N(50, 100/100) = N(50, 1)$$

となる．従って， $Z = \frac{\bar{X} - 50}{\sqrt{100/100}} = \frac{\bar{X} - 50}{1}$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う確率変数となる．これより，

$$P(\bar{X} > 52) = P(Z > 2)$$

となり，表 3.2 より，

$$P(Z > 2) = 0.02275$$

となる．