

§ 4 練習問題の解答

信頼区間の表記に関する注

ある母数 θ の信頼区間を構成するために利用される確率変数が離散的な場合は, (a, b) と表記される开区間 $a < \theta < b$ と, $[a, b]$ と表記される閉区間 $a \leq \theta \leq b$ とを明確に区別する必要があるが, 連続的な確率変数を用いて信頼区間を構成する場合には, この点にはこだわらない.

信頼区間に関する以下の解答例では, なかば意識的に (a, b) と $[a, b]$ とを混在して記述している.

問 4.1

(1) 4.3.4 節に記したとおり, 体重の分布は正規分布とは異なるから, 正規分布を用いた確率の計算は誤差が大きいことがある. 実際, 図 4.5 の母集団の分位点を `quantile(weight.data, prob=c(.025, .975))` として求めると 2.5% 点, 97.5% はそれぞれ 45.2, 87.7 となり, 正規分布から計算した $55.6 \pm 1.96 \times 7.2 = (41.5, 69.7)$ とはかなり異なっている.

(2) 体重の平均 \bar{x} の分布は $n = 10$ 程度でも正規分布によって非常によく近似される. したがって合計 $S = n\bar{x}$ も正規分布で近似される. $E(S) = n\mu = 556$, $\text{var}(S) = n\sigma^2 = 10 \times 7.2^2 = 22.8^2$ だから, $z = (S - 556)/22.8 \sim N(0, 1)$ であり,

$$\Pr(S > 560) = \Pr\left(z > \frac{560 - 556}{22.8}\right) = \Pr(z > 0.175) \doteq 0.569$$

となる.

以上の結論は中心極限定理の現実的な応用による. 体重の場合は正規分布とは極端に異ならないため比較的小さな n に対しても \bar{x} は正規分布に近いが, 所得のように極端な歪みを持つ分布の場合には n が数百を超えないと正規分布の近似はよくなる.

(3) 前問のとおり, 中心極限定理によって近似的に $\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ であり, 4.3 節で解説されている t 分布を利用した信頼区間を構成することができ

る．自由度 $n - 1 = 49$ の t 分布の上側 2.5% 点は 2.01 だから，信頼区間は

$$\bar{x} \pm 2.01 \times s/\sqrt{n} = 62.8 \pm 2.01 \times 8.4/\sqrt{50} = (60.4, 65.2)$$

もし $\sigma = 8.4$ を既知と想定して正規分布を用いた信頼区間を求めると， $\bar{x} \pm 1.961 \times \sigma/\sqrt{n} = (60.5, 65.1)$ と信頼区間の幅がわずかに短くなるが， $n = 50$ なら，その差は小さい．

問 4.2

(1) 母分散 σ^2 が既知なら，p.127 の記述から $(\bar{x} - \mu) \sim N(0, \sigma^2/n)$ となる．したがって $|\bar{x} - \mu| \leq 1.96 \sigma/\sqrt{n}$ となる確率が 95% である．信頼区間は，これを μ について解いた形で与えられる． μ_1 の信頼区間は $62.2 \pm 1.96 \times 11.0/\sqrt{32} = (58.4, 66.0)$ ， μ_2 の信頼区間は $71.4 \pm 1.96 \times 10.8/\sqrt{35} = (67.8, 75.0)$ である．

(2) 母分散が未知の場合は，前問の 1.96 に代えて自由度 $n - 1$ の t 分布の上側 2.5% 点を用いればよい．自由度 31, 34 ではそれぞれ 2.04 と 2.03 だから， μ_1 の信頼区間は $62.2 \pm 2.04 \times 11.0/\sqrt{32} = (58.2, 66.2)$ ， μ_2 の信頼区間は $71.4 \pm 2.03 \times 10.8/\sqrt{35} = (67.7, 75.1)$ である．

なお t 分布のパーセント点を求める R のコマンドは `qt(0.975, df=c(31, 34))` である．

問 4.3

(1) 勤労者世帯の消費支出のように，極端な正の歪みを持った（右の裾が長い）分布でも， $n = 2500$ と十分に大きい場合には，標本平均 \bar{x} は正規分布にしたがうと考えてよい．また，母集団の標準偏差は標本の標準偏差にほぼ等しい．95% 信頼区間は $|\bar{x} - \mu| \leq 1.96 s/\sqrt{n} = 1.96 \times 29.5/\sqrt{2500}$ の解として $31.6 < \mu < 34.0$ となる．

(2) 消費支出のような強い歪みを持った母集団分布からの標本平均の分布は，調査世帯数が $n = 25$ 程度では，正規分布には十分近いとは言えない．したがって，正規分布を利用した信頼区間の公式 $\bar{x} \pm 1.96 s/\sqrt{25}$ や 1.96 を自由度 $25 - 1 = 24$ の t 分布の上側 2.5% 点である 2.06 で置換えた $\bar{x} \pm 2.06 s/\sqrt{25}$ を構成しても，参考程度の意味しか持たない．

問 4.4

(1) 4.5 節の記述のとおり, n が大きいので二項分布の正規近似が有効であり, 母集団の支持率 p の推定量 $\hat{p} = x/n$ の分布は $N(p, p(1-p)/n)$ と見なしてよい. 本文の (4.5.3) 式のとおり, 95% 信頼区間は

$$\hat{p} \pm 1.96 \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} = 0.6 \pm 1.96 \sqrt{0.6 \cdot 0.4/n} = (0.581, 0.619)$$

となる.

(2) 実際は非復元抽出を用いているとしても, 母集団が $N = 100000$ と大きく抽出率 $f = n/N$ が小さいため, 有限母集団修正の係数 $\text{fpc} = (N-n)/(N-1) \div 1-f = 0.975$ は 1 に近いから, 結論はほとんど変わらないと予想される. 実際, $\hat{p} \pm 1.96 \times \sqrt{\text{fpc} \cdot \hat{p}(1-\hat{p})/n}$ から求めた信頼区間は $(0.581, 0.619)$ となり, 有限母集団修正を行わない方法と 3 ケタまで一致している.

(3) $N = 5000$ となると, 抽出率は $f = 2500/5000 = 0.5$ と無視できないため, 有限母集団修正を考えよう. このときでも $n = 2500$ は小さくないので正規近似が利用できるから, 前問と同じ手順で計算すると支持率の信頼区間として $(0.586, 0.614)$ が得られる. このとき信頼区間の幅は, 有限母集団修正をしない場合の信頼区間の幅の $\sqrt{(N-n)/(N-1)} \div 0.71$ 倍となり短くなるが, この程度の抽出率でも極端な違いは出ない. なお, 正規近似のためには n だけでなく, $N-n$ も十分に大きいことが必要である.

問 4.5

(1) 親の身長 x と子の身長 y に関する観測値が独立なら, 4.3.5 節に解説したとおり, 標本平均 \bar{x} と \bar{y} は独立な正規分布 $\bar{x} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/m)$, $\bar{y} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n)$ と想定できる. それらの差 $d = \bar{x} - \bar{y}$ も正規分布にしたがい, 平均は $\delta = \mu_1 - \mu_2$, 分散は $\text{var}(d) = \sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n = \sigma^2(1/m + 1/n)$ となる. x と y の標本分散には多少の違いがあるが, 簡単のために等分散性を仮定する.

結局, 本文 133 ページにある手順を, 外れ値と思われる 2 ケースを除いた $n = 18$ の観測値に適用すればよい. こみにした分散の推定値は

$s_w^2 = [(18-1)5.84^2 + (18-1)5.45^2]/34 = 118.7194 = 5.648^2$ であり, 自由度 $m+n-2 = 34$ の t 分布の上側 2.5% 点は $t_0 = 2.03$ だから, $\delta = \mu_1 - \mu_2$ の信頼区間は次のようになる.

$$\begin{aligned} (\bar{x} - \bar{y}) \pm 2.03 s_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} &= 3.06 \pm 2.03 \times 5.648 \sqrt{\frac{1}{18} + \frac{1}{18}} \\ &= 3.06 \pm 3.826 = (-0.77, 6.89) \end{aligned}$$

R を使えば, 次が計算の手順である.

```
sw <- sqrt( ((18-1)*5.84^2 + (18-1)*5.45^2 )/34)
(171.0 - 167.94) - qt(0.975,df=34) *sw * sqrt(1/18+1/18)
(171.0 - 167.94) + qt(0.975,df=34) *sw * sqrt(1/18+1/18)
```

なお, 検定のためのコマンド `t.test(son, father, var.equal=T)` を使うと, 出力の中に信頼区間が表示される.

95 percent confidence interval:

-0.7710967 6.8822078

(2) 対応のある場合には, $d = x - y$ の分布が $N(\delta, \sigma_d^2)$ となることを利用する. d の標本分散 s_d^2 は, x と y について標本分散と標本共分散が与えられているから, 次のように求めることができる.

$$s_d^2 = s_x^2 - 2s_{xy} + s_y^2 = 34.12 - 2 \times 24.71 + 29.70 \div 3.795^2$$

これと自由度 $n-1 = 17$ の t 分布の上側 2.5% 点 $t_0 = 2.11$ を用いると 95% 信頼区間は $(171.0 - 167.94) \pm 2.11 \times 3.795/\sqrt{18} \div (1.18, 4.94)$ となる.

(3) 相関係数は $r = 0.776$ であり, 4.7 節の z 変換を求めると $z = (1/2) \log((1+r)/(1-r)) = 1.035$ となる. 本文のように分散 $\frac{1}{n-3} = \frac{1}{15}$ の正規分布を想定すると, $\zeta = (1/2) \log((1+\rho)/(1-\rho))$ の 95% 信頼区間は, $z \pm 1.96/\sqrt{15} = 1.035 \pm 1.96/\sqrt{15} = (0.529, 1.54)$ となる. これを元の単位に戻すと $\tanh(0.529) = 0.48$, $\tanh(1.54) = 0.91$ だから, 母集団相関係数の 95% 信頼区間は $0.48 < \rho < 0.91$ となる.

問 4.6

(1) μ_1 の 95% 信頼区間は $n = 150$ の観測値から得られた標本平均 $\bar{x}_{\cdot 1} = 144.7$ と標本標準偏差 $s_{\cdot 1} = 20.85$ を用いて, $\bar{x}_{\cdot 1} \pm 1.96 \times s_{\cdot 1}/\sqrt{n} = 144.7 \pm 1.96 \times 20.85/\sqrt{150} = (141.4, 148.0)$ と求められる. 同様に μ_2 の 95% 信頼区間は, $\bar{x}_{\cdot 2} \pm 1.96 \times s_{\cdot 2}/\sqrt{n} = 155.6 \pm 1.96 \times 21.91/\sqrt{150} = (152.1, 159.1)$ となる.

自由度が十分大きいので t 分布を使っても, 正規分布の場合の 1.96 が 1.976 となるだけで, 結果はほとんど変わらない.

(2) 試験の成績が正規分布で近似されるという想定は妥当であり, このとき 4.4 節のとおり, $(n-1)s_1^2/\sigma_1^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布にしたがい, $\chi_L^2 \leq (n-1)s_1^2/\sigma_1^2 \leq \chi_U^2$ が確率 95% で成立する. 自由度 149 の χ^2 分布の下側と上側の 2.5% 点はそれぞれ $\chi_L^2 = 121.8$, $\chi_U^2 = 184.7$ だから, 観測値を代入した $121.8 \leq 149 \times 434.537/\sigma_1^2 \leq 184.7$ を解いて, σ_1^2 の 95% 信頼区間 $350.5 \leq \sigma_1^2 \leq 531.6$ が得られる.

同様にして $121.8 \leq 149 \times 480.098/\sigma_2^2 \leq 184.7$ から $387.3 \leq \sigma_2^2 \leq 587.3$ が得られる.

(3) 4.3.5 節で扱った, 分散が未知だが等しい場合である. こみにした分散の推定値は $s_w^2 = \{149 \times 434.537 + 149 \times 480.098\}/298 = 457.318 = 21.38^2$ となるから, $\delta = \mu_1 - \mu_2$ の 95% 信頼区間は次のとおりである.

$$(\bar{x}_{\cdot 1} - \bar{x}_{\cdot 2}) \pm 1.96 \times s_w \sqrt{(1/150) + (1/150)} = [-15.68, -5.96]$$

(4) 問題文のとおり, 独立な標本 $d_i \sim N(\delta, \sigma^2)$ ($i = 1, \dots, 5$) を用いて推定すればよい. $\bar{d} \sim N(\delta, \sigma^2/5)$ であり, 自由度 4 の t 分布の上側 2.5% 点は $t_0 = 2.78$ だから, δ の 95% 信頼区間は $-10.83 \pm 2.78 \times 3.891/\sqrt{5} = [-15.7, -6.0]$ と求められる.

なお, この問題では \bar{x}_{i1} と \bar{x}_{i2} が平均であり, 中心極限定理によって正規分布に近いと考えてよい. それらの差である各 d_i も正規分布と想定できるから, 小さな自由度の t 分布を用いても妥当な信頼区間が構成できる.