

§ 5 練習問題の解答

問 5.1

色的の中する確率を p とすると、20 回のうちで色が当たる回数 x は二項分布 $B(20, p)$ にしたがう。帰無仮説は「超能力を持っていない」ということであり、二項分布をモデルとすると帰無仮説は $H_0: p = p_0 = 1/2$ と表され、このとき $x \sim B(20, 1/2)$ となる。対立仮説としては両側対立仮説 $H_0: p \neq 1/2$ を取る。違う色を確実に選べることも超能力と考えれば、片側対立仮説よりも自然である。

$n = 20$ と比較的小さいが、5.3.1 節の正規分布による近似を利用して検定を実施すると、以下ようになる。 H_0 の下で $\mu_0 = E(x) = np_0 = 10$, $\text{var}(x) = np_0(1 - p_0) = 5$ だから、 $x \sim N(10, 5)$ による有意水準 5% の検定の棄却域は $|x - 10|/\sqrt{5} \geq 1.96$ となる。観測値に対しては $|x - 10|/\sqrt{5} = |15 - 10|/\sqrt{5} = 2.23 \geq 1.96$ だから仮説は棄却される。しかし有意水準を 1% とすると棄却域は $|x - 10|/\sqrt{5} \geq 2.58$ だから仮説を棄却されない。

n が小さいから、より正確な解法として離散的な確率分布である二項分布を、直接利用してみよう。確率変数 x の値が実際の観測値 15 と一致する確率は $\Pr(X = 15 | H_0) = {}_{20}C_{15}(1/2)^{20} \doteq 0.01478577$ である。確率が (等号を含んで) これ以下となる事象は $x = 0, \dots, 5$ および $x = 15, \dots, 20$ の場合である。したがって観測された事象と同等あるいはそれ以上に起こりにくい事象の確率は $1 - \Pr(6 \leq x \leq 14) = 0.04139$ となり、この確率が P -値である。これは有意水準とした 5% より小さいから、仮説は棄却される。R を用いれば、`binom.test(15, 20, p=0.5)` というコマンドで形式的な仮説検定の結果と並んで `p-value = 0.04139` や信頼区間が出力される。

なお、この問題で P -値 を計算するためには正規分布の近似は十分とはいえない。実際、 $x \sim N(10, 5)$ を仮定して P -値を求めると、 $\Pr(|x - 10|/\sqrt{5} \geq 2.23) = \Pr(|z| \geq 2.23) = 0.0257$ となり、正確な P -値とは差がある。

問 5.2

本文 115 ページに $n = 20$ 個の観測値の平均 $\bar{x} = 909.0$ と標準偏差 $s = 104.93$ が与えられている．観測値は正規分布にしたがうと想定すると，5.2 節で解説されている両側対立仮説の t 検定が適用できる． $t = \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)/s$ は帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ の下で自由度 $n - 1$ の t 分布にしたがう．自由度 19 のとき，上側 2.5% 点は $t_0 = 2.09$ だから，有意水準 5% の検定の棄却域は $|t| \geq 2.09$ である．

第 1 の帰無仮説 $H_0: \mu = 990$ については t 値は $t = \sqrt{n}(\bar{x} - \mu)/s = -3.45$ であり，仮説は棄却される．第 2 の帰無仮説 $H_0: \mu = 792$ については， $t = \sqrt{n}(\bar{x} - \mu)/s = 4.99$ であり，この仮説も棄却される．

なお `t.test(speed, mu=990)` として得られる仮説 $\mu = 990$ の P -値は 0.0027 であるが，仮説 $\mu = 792$ の P -値は $8.189\text{e-}05$ (10 万分の 8) と極めて小さい．実験当時に信じられていた光速が 990 であり，現在知られている光速が 792.458 であることを考えると，興味深い結果である．

問 5.3

歪みのないコインを考えると， $n = 10000$ 回投げたときに表の出る回数 x は二項分布 $B(n, 1/2)$ にしたがうから，最も確率が高い結果は $x = 5000$ である．形式的な仮説検定では帰無仮説 $H_0: p = 1/2$ は棄却されないし， P -値は 1.0 となる．

しかし $x = 5000$ が出現する確率は $\Pr(x = 5000) \doteq 0.0080$ と非常に小さい．帰無仮説の下で「現実を得られた結果が珍しければ仮説を疑う」のが仮説検定の考え方だから，問題の場合は裾の確率の代わりに極端に期待値に近くなる確率を考えて，何らかの作為によって x が $E(x) = np = 5000$ に近くなるように見せかけた可能性が疑われる．

仮に $x = 5003$ が得られたとすると $\Pr(4997 \leq x \leq 5003) = 0.056$ となり，この確率はある程度大きいから，コイン投げの作為を疑う強い根拠とはいえない．

問 5.4

(1) 正規分布の分散 $\sigma^2 = 100^2$ を既知として、帰無仮説を $H_0: \mu = 500$ とする．対立仮説は片側で $H_1: \mu < 500$ を考える．5.2.1 節で説明されている手順にしたがうと、棄却域は $\bar{x} \leq \mu_0 - z_0 \sigma / \sqrt{n}$ となる．ここで $z_0 = 1.645$ は正規分布の上側 5% 点である． $\mu_0 - z_0 \sigma / \sqrt{n} = 500 - 1.645 \times 100 / \sqrt{40} = 474.0$ に対して $\bar{x} = 485$ だから、仮説は棄却されない．

より簡単に $z = \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0) / \sigma = \sqrt{40}(485 - 500) / 100 = -0.9486$ を計算して -1.645 と比較してもよい．

(2) 分散が既知の場合の信頼区間は 4.3 節で解説されている手順を用いれば、 $\bar{x} \pm 1.96 \sigma / \sqrt{n} = 485 \pm 1.96 \times 100 / \sqrt{40} = [454.0, 516.0]$ が得られる．

171 ページの「コラム」に記したとおり、両側仮説検定で棄却されない母数の全体は、信頼区間と一致する．前問の帰無仮説の値 $\mu = 500$ は信頼区間に含まれているから、「有意水準 5% の両側検定」を適用すると、仮説は棄却されないことがわかる．

なお片側対立仮説の場合には、片側区間 $\mu \geq \bar{x} + 1.645 \sigma / \sqrt{n} = 485 + 1.645 \times 100 / \sqrt{40} = 511.0$ を (片側) 信頼区間と考えると、ある仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ が受容されることと、 μ_0 が片側信頼区間に含まれることが同等である．この問題の数値例では、 $\mu = 500$ が (片側) 信頼区間に含まれている．片側区間を信頼区間と考えてよいことは次の関係式からわかる．

$$\Pr \left\{ \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma / \sqrt{n}} \leq -1.645 \right\} = \Pr \left\{ \mu \geq \bar{x} + 1.645 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = 0.95$$

(3) 帰国子女のクラスや、付属高校からの進学クラスを選んだりするのは、母集団を代表する標本とはいえない．標本は母集団から無作為に抽出されることが、統計的分析の正当性を保証するひとつの方法である．単純無作為抽出の方法以外にも、各クラスから男女 2 名ずつを抽出するという層別抽出など、さまざまな抽出方法があるが、客観的な判断を可能とする目的で導入される．

問 5.5

(1) $H_0: \mu = 200$ を両側対立仮説 $\mu \neq 200$ に対して検定すればよい．ここでは分散が既知だから，次の z を求めるのが簡単である．

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{207 - 200}{10/\sqrt{16}} = 2.80$$

両側検定の棄却域 $|z| \geq 1.96$ と比較して，仮説は棄却される．

なお， $\Pr(|z| \geq 2.80) = 0.0051$ として求められる P -値も十分小さいため，生産工程に何らかの障害が発生していることが疑われる．

(2) 標準偏差 $\sigma = 10$ をもつ正規分布にしたがうことを前提とするから，4.3 節の手順を用いて $z = \sqrt{n}(\bar{x} - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$ を利用すればよい．信頼係数 95% の信頼区間は $\bar{x} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 207 \pm 1.96 \frac{10}{\sqrt{16}} = [202.1, 211.9]$ である．

$\mu = 200$ はこの区間に含まれないから，前問で見たとおり，帰無仮説 $H_0: \mu = 200$ は「有意水準 5%，両側対立仮説」を用いると棄却される．

(3) σ は未知だから t 検定を用いる．やはり 4.3 節の手順を用いて $t = \sqrt{n}(\bar{x} - \mu)/s \sim t_{n-1}$ を利用する．自由度は $16 - 1 = 15$ ，両側対立仮説を想定して，上側 2.5% 点は $t_0 = 2.13$ である．これと $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = 2.80$ を比較して仮説は棄却される．

なお信頼係数 95% の信頼区間は $\bar{x} \pm 2.13 \frac{s}{\sqrt{n}} = 207 \pm 2.13 \frac{10}{\sqrt{16}} = [201.7, 212.3]$ であり， $\mu = 200$ は含まれていないが，このことは仮説検定の結果と整合的である．

問 5.6

(1) $d = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ とすると $d \sim N(\delta, \sigma^2(1/n_1 + 1/n_2))$ を標準化した $z = \frac{d - \delta}{\sigma\sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)}} \sim N(0, 1)$ から， $\Pr(|z| \leq 1.96) = 0.95$ が成立する．これらを用いれば， δ の信頼係数 95% の信頼区間の一般的な表現が導かれる．

$$d - 1.96 \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \delta \leq d + 1.96 \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

(2) $E(d) = \mu_1 - \mu_2 = 0$ である．分散は前問の解答でも利用しているが，次のように評価する．

$$\text{var}(d) = \text{var}(\bar{x}_1) + \text{var}(\bar{x}_2) = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$$

(3) 帰無仮説は「教育方法には差がない」を表す $H_0: \mu_1 = \mu_2$ （あるいは $\delta = 0$ ）である．どちらの教育方法が優れているかは問題としていないから，対立仮説は両側で「教育方法には差がある」ことを表す $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ （あるいは $\delta \neq 0$ ）が適当である．問 (1) の $z = \frac{d - \delta}{\sigma \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)}} \sim N(0, 1)$ を用いれば，棄却域は $|z| > 1.96$ である．与えられた値を代入すると $z = (65.0 - 70.0)/(6.32\sqrt{1/20 + 1/20}) = -2.50$ となるから，仮説は棄却される．なお P -値は $2\Pr(z < -2.50) = 0.012$ である．

問 5.7

(1) 5章には分散に関する検定は記述されていないが，4.4節の区間推定の議論を利用すれば，容易に標準的な検定方法が構成できる．

標本が独立に正規分布 $x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($i = 1, \dots, n$) にしたがうとき，

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

であり，自由度 $n-1$ の χ^2 分布の下側と上側の $100\alpha/2\%$ 点をそれぞれ χ_L^2 , χ_U^2 とすると， $\Pr\{\chi_L^2 \leq (n-1)s^2/\sigma^2 \leq \chi_U^2\} = 1 - \alpha$ となる．これから， $\chi^2 = (n-1)s^2/\sigma^2$ を統計量とする検定が導かれる．

帰無仮説を $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ として，対立仮説を両側 $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ とした有意水準 α の仮説検定は $\chi_L^2 \leq (n-1)s^2/\sigma^2 \leq \chi_U^2$ を受容域とする．仮説 H_0 が正しいときには $\chi^2 = (n-1)s^2/\sigma^2$ はその期待値 $E[(n-1)s^2/\sigma_0^2] = n-1$ に近い値を取る可能性が高い．他方，母集団分散 σ^2 が σ_0^2 と異なれば χ^2 は

受容域の外に出る確率が高くなることが予想されるから，合理的な方法である．

問題文の記述から $n - 1 = 149$ であり $\chi_L^2 = 117.1$, $\chi_U^2 = 184.7$ となる．

教材 E_1 については $\chi^2 = (n - 1)s^2/\sigma^2 = 149 \times 434.537/400 = 161.9$ だから仮説は棄却されない．教材 E_2 については $\chi^2 = 149 \times 480.10/400 = 178.8$ だから，こちらも仮説は棄却されない．データは，両方の教材とも標準偏差を 20 点になるように設計したという主張には矛盾していない．

(2) 前問の結果から，両方の教材で分散には大きな差がないことがわかる．そこで，5.2.3 節の分散が未知で等しい場合の方法を適用する．こみにした分散は

$$s^2 = \frac{149 \times 434.537 + 149 \times 480.10}{149 + 149} = \frac{434.537 + 480.10}{2} = 457.3185 = 21.39^2$$

であり，観測された $t = (144.75 - 155.57)/(21.39\sqrt{1/150 + 1/150}) = (144.75 - 155.57)/(21.39 \times 0.1155) = -4.38$ を自由度 298 の t 分布の上側 2.5% 点 $t_0 = 1.97$ と比べて，仮説は棄却される．

なお仮説 $\delta = \mu_1 - \mu_2 = 0$ が棄却されることは， δ の信頼区間が 0 を含まないことと同等である．4 章の練習問題，問 4.6 (3) の解答と比較すると，この関係が理解できよう．

(3) 対応のある場合の分析方法を利用する．独立な標本 $d_i \sim N(\delta, \sigma^2)$ ($i = 1, \dots, 5$) を想定すると $H_0 : \delta = 0$ のとき $t = \bar{d}/(s/\sqrt{5}) \sim t_4$ で，自由度 4 の t 分布の上側 2.5% 点は $t_0 = 2.78$ である．実現値は $t = (-10.83)/(3.891/\sqrt{5}) = -6.22$ だから仮説は棄却される． P -値は $\Pr(|t| > 6.22) = 0.0034$ と小さく，二つの教材の効果には差があると言ってよい．

問 5.8 5.4.2 節の χ^2 を用いる .

	観測度数 O_{ij}		
	改善	不変	計
A	52	11	63
B	40	17	57
計	92	28	120

	期待度数 E_{ij}		
	改善	不変	計
A	48.3	14.7	63
B	43.7	13.3	57
計	92	28	120

これから

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(52 - 48.3)^2}{48.3} + \frac{(11 - 14.7)^2}{14.7} + \frac{(40 - 43.7)^2}{43.7} + \frac{(17 - 13.3)^2}{13.3} \\ &= \frac{(3.7)^2}{48.3} + \frac{(-3.7)^2}{14.7} + \frac{(-3.7)^2}{43.7} + \frac{(3.7)^2}{13.3} \div 2.58\end{aligned}$$

が得られる . 自由度 1 のカイ二乗分布の上側 5% 点は 3.84 だから , 薬の効果には有意な差はない . ただし P -値は $\Pr(\chi^2 \geq 2.56) = 0.1096$ であり , もう少し慎重な検討が必要にみえる .

別な解法として , 二つの母集団の比率を検定する (5.3.3) 式を適用してみよう . $\hat{p}_1 = 52/63 = 0.8254$, $\hat{p}_2 = 40/57 = 0.7018$, $\hat{p}^* = (52+40)/(63+57) = 0.7667$ だから , 検定統計量は $z = \frac{0.8254 - 0.7018}{\sqrt{0.7667(1 - 0.7667)(1/63 + 1/57)}} = 1.60$ となり , 両側検定では有意水準 5% で有意にならない . P -値は $\Pr(|z| \geq 1.60) = 0.1096$ と , 分割表の検定と一致している .